

Leçon 156

Endomorphismes trigonalisables.

Endomorphismes nilpotents.

I - Endomorphismes trigonalisables

II - Endomorphismes nilpotents

III - Application à la réduction

Dev 1 : Théorème de Lie-Kolchin

Dev 2 : Dénombrement des matrices trigonalisables de

$M_n(\mathbb{F}_q)$

I - Endomorphismes trigonalisables

1) Définition et caractérisations : def, lien drapeaux, polynôme caractéristique, théorème de Cayley-Hamilton, critères de trigonalisation, cas algébriquement clos, trace et déterminant, [Gri18]

2) Co-trigonalisation : $uv = vu \Rightarrow \ker u$ et $\text{Im } u$ v -stables et si u, v trig il existe un vecteur propre commun, co-trigonalisation, réciproque fausse, [dev 1]

3) Topologie : $M \mapsto \chi_M$ continue, pas $M \mapsto \pi_M$, $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est fermé, $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ est l'adhérence de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ [FGN09]

II - Endomorphismes nilpotents

1) Définition et caractérisations : def, indice de nilpotence, caractérisations, sommes de Newton, critère via les traces, exemples [BMP04]

2) Cône nilpotent : structure de cône, cas dimension 2, dessin, nilpotents qui commutent, composition de nilpotents, espace engendré [BMP04]

3) Noyaux itérés : noyaux itérés, décomposition de Fitting, dénombrement des endomorphismes nilpotents sur $\mathbb{F}_q$, [dev 2][CP24]

III - Application à la réduction

1) Décomposition de Dunford : décomposition de Dunford, cas réel, A diagonalisable ssi e^A diagonalisable, calculs avec Dunford [Ber18]

2) Réduction de Jordan : cas nilpotent, cas général, tableaux de Young, lien noyaux itérés, invariant de similitude, exemples [Ber18]

Références

- [BMP04] Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation : Mathématiques*. H&K, 2004.
- [Ber18] Grégory BERTHUY. *Algèbre : Le grand combat*. Calvage & Mounet, 2018.
- [CP24] Philippe CALDERO et Marie PERONNIER. *Carnet de Voyage en Algèbre*. Calvage & Mounet, 2024.
- [FGN09] Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS. *Oraux X/ENS Algèbre 2*. Cassini, 2009.
- [Gri18] J. GRIFONE. *Algèbre Linéaire*. Cépaduès-Editions, 2018.